文章编号:1007-2985(2011)05-0009-02

Smarandache 复合函数的渐近公式*

黄 炜
(宝鸡职业技术学院基础部,陕西 宝鸡 721013)

摘 要:研究了 Smarandache 复合函数的均值性质,并用解析方法得到了其均值的 2 个渐近公式.

关键词:Smarandache 复合函数;均值;渐近公式
中图分类号:O156.4 文献标志码:A

1 问题的提出

对于任意的正整数 n,著名的 Smarandache 函数 $S(n)$ 定义为最小的正整数 m,即 $S(n)=\min\{m:n\mid m!,m\in\mathbf{N}\}$,该数列的前几项为 1,2,3,4,5,3,7,4,6,5,11,4,13,7,5,6,17,6,19,6,7,⋯.从 $S(n)$ 的定义和性质很容易推断,对于任意正整数 n,若它的标准素因数分解式是 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,则有 $S(n)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{S(p_i^{\alpha_i})\}$.关于函数 $S(n)$ 的性质,不少学者进行了研究,文献[1]中研究了 $S(n)$ 的值分布性质,文献[2-7]中也进行了研究,获得较好的结果.

文献[7]研究了 Smarandache 函数的值分布性质,获得下面更深刻的结果:设 $P(n)$ 表示 n 最大素因数,对于任意整数 $x>1$,有渐进公式:

$$\sum_{n\leqslant x}(S(n)-P(n))^2=\frac{2\zeta(\frac{3}{2})x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x}+O(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}).$$

笔者研究了函数 $S^k(n)$ 和 $\frac{S^k(n)}{n}$ 的均值,并得到几个有趣的渐近公式,即证明了下面的结论:

定理 1 设是 $k\geqslant 1$ 给定正整数,对于任意实数 $x>1$,有近似公式

$$\sum_{n\leqslant x}S^k(n)=\frac{\zeta(k+1)}{k+1}\cdot\frac{x^{k+1}}{\ln x}+O(\frac{x^{k+1}}{\ln^2 x}).$$

定理 2 设是 $k\geqslant 1$ 给定正整数,对于任意实数 $x>1$,有近似公式

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{S^k(n)}{n}=\frac{2\zeta(k+1)}{k+1}\cdot\frac{x^k}{\ln x}+O(\frac{x^k}{\ln^2 x}).$$

2 几个引理

引理 1 对于任意正整数 n,如果它的标准素因数分解式是 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,设 $P(n)$ 表示 n 的最大素因子,那么:

(ⅰ) 若 $P>\sqrt{n}$,则 $S(n)=P(n)$;

* 收稿日期:2011-05-22
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10671155);陕西省自然科学基金资助项目(SJ08A28)
作者简介:黄 炜(1961-),男,陕西岐山人,宝鸡职业技术学院基础部教授,硕士,主要从事数论及特殊函数研究.

(ⅱ) 若 $n=kp_1p_2, p_2>p_1>\sqrt[3]{n}>k$ 的 p_1, p_2, k 两两互素,则 $S(n)=P(n)$;

(ⅲ) 若 $n=kp^2$ 且 $p>\sqrt[3]{n}>k$,则 $S(n)=2P(n)$.

证明见文献[7].

引理 2 对于任意正整数 n,若它的标准素因数分解式是 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,则有 $S(n)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{S(p_i^{\alpha_i})\}$.

证明见文献[7].

引理 3 对于任何实数 $x>1$,有渐近公式

$$\pi(x)=\sum_{p\leqslant n}1=\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i\cdot x}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1} x}\right),$$

其中 $\pi(x)$ 表示不超过 x 的所有素数 p 的个数,$a_i=(i-1)!, i=1,2,3,\cdots,k$.

证明可参阅文献[8].

3 定理的证明

3.1 定理 1 的证明

现将区间$[1,x]$中的所有正整数分成 2 个集合 A,B,其中 A 是满足那些存在素数 p,使得 $p\mid m$,且 $p>\sqrt{n}$ 的整数 n 的集合,而 B 是包含区间$[1,n]$中不属于集合 A 的那些正整数 n 的集合. 由 A,B 的定义有

$$\sum_{n\leqslant x}S^k(n)=\sum_{\substack{n\leqslant x,\\ n\in A}}S^k(n)+\sum_{\substack{n\leqslant x,\\ n\in B}}S^k(n).$$

现利用引理 1,下面逐一计算:

(ⅰ) 对于任意的 $n\geqslant 1$ 且 $n\in A$,因 $P>\sqrt{n}$,故 n 的标准分解式中最大素数 P 的次数为 1,不妨设 $n=mp$ 且 m 的所有素因子 q 满足 $q<\sqrt[3]{n}$,由于 $p<\sqrt{n}$ 时 $S(n)\leqslant n^{\frac{1}{2}}\ln n$,因此有

$$\sum_{\substack{n\leqslant x,\\ n\in A}}S^k(n)=\sum_{\substack{mp\leqslant x,\\ p>\sqrt{n}}}S(p^k)=\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\sum_{m\leqslant p\leqslant\frac{x}{m}}p^k=\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\frac{\left(\frac{x}{m}\right)^{k+1}}{(k+1)\ln\frac{x}{m}}+O\left(\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\sum_{m\leqslant p\leqslant\frac{x}{m}}p^k\right)=$$
$$\frac{x^{k+1}}{(k+1)\ln x}\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{m^{k+1}}+O\left(\frac{x^{k+1}}{m^{k+1}}\frac{1}{\ln^2 x}\right)=\frac{\zeta(k+1)}{k+1}\frac{x^{k+1}}{\ln x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^2 x}\right).$$

(ⅱ) 若 $n\in B$,此时有 $n=mp^2$,由于 $p>\sqrt{n}$ 时 $S(n)\leqslant n^{\frac{1}{2}}\ln n$,因此有

$$\sum_{\substack{n\leqslant x,\\ n\in B}}S^k(n)\ll\sum_{\substack{n\leqslant x,\\ n\in B}}n^{\frac{k}{2}}\ln^k n=\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\sum_{\sqrt{x}\leqslant p\leqslant\frac{x}{m}}(mp)^{\frac{k}{2}}\ln^k(mp)=\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}m^{\frac{k}{2}}\left(\frac{x}{m}\right)^{\frac{k}{2}}\ln^k x\ \frac{x}{\ln x}\ll x^{\frac{k+2}{2}}\ln^k x.$$

由(ⅰ)和(ⅱ)立即得到

$$\sum_{n\leqslant x}S^k(n)=\sum_{\substack{n\leqslant x,\\ n\in A}}SS^k(n)+\sum_{\substack{n\leqslant x,\\ n\in B}}S^k(n)=\frac{\zeta(k+1)}{k+1}\cdot\frac{x^{k+1}}{\ln x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^2 x}\right).$$

这就完成了定理 1 的证明.

3.2 定理 2 的证明

应用 Abel's 求和公式,得

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{S^k(n)}{n}=\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}S^k(n)+\int_1^x\frac{1}{y^2}\left(\sum_{n\leqslant y}S^k(y)\right)\mathrm{d}y=\frac{1}{x}\left(\frac{\zeta(k+1)}{k+1}\cdot\frac{x^{k+1}}{\ln x}+O\left(\frac{x^{k+1}}{\ln^2 x}\right)\right)+$$
$$\int_1^x\frac{1}{y^2}\left(\frac{\zeta(k+1)}{k+1}\cdot\frac{y^{k+1}}{\ln y}+O\left(\frac{y^{k+1}}{\ln^2 y}\right)\right)\mathrm{d}y=\frac{\zeta(k+1)}{k+1}\cdot\frac{x^k}{\ln x}+$$
$$O\left(\frac{x^k}{\ln^2 x}\right)+\int_1^x\frac{\zeta(k+1)}{k+1}\cdot\frac{y^{k-1}}{\ln y}\mathrm{d}y+O\left(\int_1^x\frac{y^{k-1}}{\ln^2 y}\mathrm{d}y\right)=$$
$$\frac{2\zeta(k+1)}{k+1}\cdot\frac{x^k}{\ln x}+O\left(\frac{x^k}{\ln^2 x}\right).$$

(下转第 15 页)

定理 2 中的（ⅰ）至（ⅴ）-型群.

这样就证明了定理 3 成立.

参考文献：

[1] ADNAN S. On Groups Having Exactly 2 Conjugacy Classses of Maximal Subgroups [J]. Lincei-Rend. Sc. Fis. Mat. Enat.，1979，66：175-178.

[2] ADNAN S. On Groups Having Exactly 2 Conjugacy Classses of Maximal Subgroups II [J]. Ibib.，1980，68：179.

[3] 施武杰. 极大子群同阶类类数不大于 2 的有限群 [J]. 数学年刊：A 辑，1985(5)：532-537.

[4] 李世荣. 非正规极大子群同阶类类数等于 2 的有限群 [J]. 数学学报，1990(3)：388-392.

[5] 黎先华. 极大子群同阶类类数＝3 的有限群 [J]. 数学学报，1994(1)：108-115.

[6] 王立中. 极大子群个数＜5 的有限群 [J]. 首都师范大学学报，2000，21(3)：10-13.

[7] 游兴中，王香芬，陈为敏. 恰有 5 个极大子群的有限群 [J]. 吉首大学学报：自然科学版，2010，31(5)：8-10.

[8] 游兴中，朱伟华，刘　峥. 恰有 6 个极大子群的有限群 [J]. 吉首大学学报：自然科学版，2011，32(3)：1-3.

[9] 徐明曜. 有限群导引 [M]. 北京：科学出版社，1999.

[10] HUPPERT B. Endlich Gruppen I [M]. Berlian：Springer-Verlag，1979.

（上接第 10 页）**参考文献：**

[1] SMARANDACHE F. Only Proplem，Not Solution [M]. Chicago：Xiquan Publishing House，1993.

[2] WANG Yong-xing. On the Smarandache Function [J]. Reserchon Smarandache Problem in Number Theory，2005，2：103-106.

[3] LU Ya-ming. On the Solution of an Equation Involving the Smarandache Function [J]. Scientia Magna，2006，2(1)：76-79.

[4] SANDOR J. On a Dual of the Pseudo-Smarandache Function [J]. Smarandache Notions，2002，13：16-23.

[5] 黄　炜. K 次方根序列的均值渐近公式 [J]. 甘肃科学学报，2009，21(3)：10-11.

[6] 黄　炜. 素因数和函数 $\bar{\omega}(n)$ 及其均值 [J]. 河南科学，2009，27(9)：1 031-1 033.

[7] 徐哲峰. 关于 Smarandache 函数的值分布 [J]. 数学学报：中文版，2006，49(5)：1 009-1 012.

[8] 潘承洞，潘承彪. 解析数论基础 [M]. 北京：科学出版社，1999.

Smarandache Involving Function and Its Asymptotic Formula

HUANG Wei

(Department of Basis，Baoji Vocational and Technical College，Baoji 721013，Shaanxi China)

Abstract：The hybrid mean value of divisor products function was studied and two asymptotic formula of this function was given by using the analytic methods.

Key words：Smarandache involving function；mean value；asymptotic formula

（责任编辑　向阳洁）